דף נוסחאות עבור המבחן בנומרית :

נוסחאות סכומים :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}, \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

נוסחת פולינום טיילור :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)h^n}{n!} + R_n$$

נוסחת שארית לגרנז עבור פולינום טיילור :

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

נוסחת ישר האינטרפולציה :

$$y = f(a) + \frac{(x-a)(f(b)-f(a))}{(b-a)}$$

מטריצת ון דר מונדה

$$vdm = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ 1 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

$$\det(vdm) = \prod_{0 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$

שיטת לגרנז למציאת פולינום האינטרפולציה

$$p = f(a_0)q_0(x) + \cdots + f(a_n)q_n(x)$$

$$q_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i}(x - a_j)}{\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)}$$

הנוסחה שעליה מסתמכת שיטת נוויל

$$p(x) = \frac{(x - a_0)h(x) - (x - a_{n+1})g(x)}{(x - a_0) - (x - a_{n+1})}$$

$$h(a_i) = f(a_i), 1 \le i \le n + 1$$

$$g(a_i) = f(a_i), 0 \le i \le n$$

$$P_{m,n} = \frac{(x - x_m)P_{m+1,n} - (x - x_n)P_{m,n-1}}{(x - x_m) - (x - x_n)}$$

נוסחת שארית לגרנז לפולינום האינטרפולציה:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c(x))(x - a_0)\cdot\cdots\cdot(x - a_n)}{(n+1)!}$$

נוסחת סכום רימן:

$$SR = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}), a = x_0 \le c_1 \le x_1 \le c_2 \le x_2 \le \cdots x_n = b$$

נוסחת סכום רימן למקרה שלכל I , $x_i - x_{i-1} = h = (b-a)/n$:

$$SR = h\sum_{i=1}^{n} f(c_i), a = x_0 \le c_1 \le x_1 = a + h \le c_2 \le x_2 = a + 2h \le \cdots x_n = a + nh = b$$

נוסחת השגיאה של סכום רימן בעל קטעים שוים, ונקודת בינים בשמאל

$$\frac{f'(c)(b-a)h}{2} = \frac{f'(c)(b-a)^2}{2n}$$

נוסחת סכום הטרפז עבור קטעים שוים

$$ST = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) + f(b)\right)$$

נוסחת השגיאה בשיטת הטרפז :

$$\frac{f''(c)(b-a)h^2}{12} = \frac{f''(c)(b-a)^3}{12n^2}$$

שיטת סימפסון עם n קטעים שוים (n=2m זוגי) :

$$\frac{h}{3}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(a+2kh) + 4\sum_{k=0}^{m-1} f(a+2kh+h) + f(b)\right), h = \frac{b-a}{n}$$

שגיאה בשיטת סימפסון :

$$\frac{f''''(c)h^4(b-a)}{180} = \frac{f''''(c)(b-a)^5}{180n^4}$$

שיטת החציה :

a_0,b_0. נקודות שנקבעו בנחוש, כך ש- $f(a_0)f(b_0)<0$. בהנתן a_n,b_n נקודות עם אותן הנחות, נגדיר $c_n=(a_n+b_n)/2$, ונביט על $f(c_n)$. אם בטוי זה שוה ל-0 סימנו, ואם לא אז $[a_{n+1},b_{n+1}]=[a_n,c_n]$, או, $[a_{n+1},b_{n+1}]=[c_n,b_n]$. הדבר נקבע כך ש- $f(a_{n+1})f(b_{n+1})<0$.

שיטת ניוטון רפסון-(המשיק) :
x_0. נקודה שנקבעה בנחוש. אז $x_{n+1}=g(x_n)$, כאשר $g(x)=x-f(x)/f'(x)$

שיטת המיתר :
x_0,x_1. נקודות שנקבעו בנחוש, אז

$$x_{n+1} = \frac{x_n f(x_{n-1}) - x_{n-1} f(x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

מהירות ההתכנסות של שיטת נקודות שבת (ההתכנסות רק אם $x_n \to l$)

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = g'(c_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} g'(l)$$

נוסחאות גזירה בסיסיות :

- $f(x)=x^r$ (כאשר r הוא מספר ממשי כלשהו) אז $f'(x)=rx^{r-1}$.
- $(fg)'=f'g+fg'$ לכל שתי פונקציות f ו- g.
- נגזרת של מנת שתי פונקציות: $\left(\frac{f}{g}\right)'=\left(\frac{f'g-fg'}{g^2}\right)$ כאשר $g\neq 0$
-
- כלל השרשרת: אם $f(x)=h(g(x))$ אז $f'(x)=h'[g(x)]g'(x)$
- נגזרת של פונקציה מעריכית: $(a^x)'=(\ln a)\,a^x,(e^x)'=e^x$
- נגזרת של פונקציה לוגריתמית: $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a},(\ln x)'=\frac{1}{x}$
- נגזרת של פונקציות טריגונומטריות:

$$(\sin x)'=\cos x,(\cos x)'=-\sin x,(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$$

- נגזרת של פונקציות טריגונומטריות הפוכות:

שגיאה!

$$(\sin^{-1}x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},(\cos^{-1}x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},(\tan^{-1}x)'=\frac{1}{1+x^2}$$

נוסחאות אי שוויון המשולש למספר ממשי:

- אם $a,b\in\mathbb{R}$ אז $|a+b|\leq|a|+|b|$.

באמצעות שינוי סימן ניתן לרשום את אי השוויון גם בצורה הזו:

- אם $a,b\in\mathbb{R}$ אז $|a-b|\leq|a|+|b|$.

כמו כן, ניתן להראות כי מתקיים:

- אם $a,b\in\mathbb{R}$ אז $|a+b|\geq|a|-|b|$.
- אם $a,b\in\mathbb{R}$ אז $|a-b|\geq|a|-|b|$.

זה מתקבל מכך ש $|a|=|a+b-b|\leq|a+b|+|-b|$ ועל ידי העברת אגפים מקבלים $|a|-|b|\leq|a+b|$.

חוקי חזקות ולוגריתמים

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$
$$a^{x_1+x_2} = a^{x_1}\cdot a^{x_2}$$
$$a^{x_1-x_2} = \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}}$$

$$a^x\cdot b^x = (ab)^x$$
$$a^{x_1\cdot x_2} = (a^{x_1})^{x_2}$$
$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

(x_1, x_2, x הם מספרים ממשיים כלשהם, m ו-n מספרים טבעיים)

$$-\log_a x = \log_a \frac{1}{x}$$
$$\log_a y + \log_a z = \log_a yz$$
$$\log_a y - \log_a z = \log_a \frac{y}{z}$$
$$\beta\cdot\log_a y = \log_a y^\beta$$
$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$a^{\log_a x} = x$$
$$\log_a a = 1$$
$$\log_a 1 = 0$$
$$\log_a a^z = z$$

נוסחאות אלגבריות

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

נוסחאות גזירה

$F(x)$	$F'(x)$
x^n	nx^{n-1}
a^x	$a^x \ln a$
e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

$F(x)$	$F'(x)$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\text{arccot}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$